Feladat 1. Az x^4-2 polinom felbontási teste hanyadfokú bővítése $\mathbb{Q}$-nak?

Megoldás: A polinom a $\mathbb{C}$ test felett elsőfokú tényezőkre bomlik, gyökei: $\sqrt[4]{2}$, $i\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}$, $-i\sqrt[4]{2}$. Így a polinomnak (egy) felbontási teste $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2})$. Ez a test megegyezik $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2})$-vel, hiszen utóbbiban nyilván benne van $-\sqrt[4]{2}$ és $-i\sqrt[4]{2}$ is.

A $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ test a $\mathbb{Q}$ negyedfokú bővítése, mert a $\sqrt[4]{2}$ szám $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomja x^4-2 (ez a Schönemann-Eisenstein kritérium alapján irreducibilis). Az $i\sqrt[4]{2}$ szám nincs benne a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ testben, mert nem valós, viszont gyöke a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ feletti másodfokú $x^2+\sqrt[4]{2}$ polinomnak.

Így $\deg_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}(i\sqrt[4]{2}) = 2$, és a fokszámtétel szerint

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}(i\sqrt[4]{2}) \cdot \deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[4]{2}) = 8.$$

Feladat 2. Legyen $\mathbf{K}$ algebrailag zárt test, és $x \in K$. Igazolja, hogy akkor és csak akkor teljesül $\varphi(x) = x$ a $\mathbf{K}$ tetszőleges φ automorfizmusa esetén, ha x benne van $\mathbf{K}$ prímtestében.

Megoldás: Legyen

$$\operatorname{Fix}\mathbf{K} := \{x \in K : \forall\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbf{K} : \varphi(x) = x\}.$$

Ez a halmaz tartalazza 0-t és 1-t, és zárt a testműveltekre (beleértve az osztást, mint parciális műveletet): ha $\star$ testművelet, és $x_1, x_2 \in \operatorname{Fix}\mathbf{K}$, akkor minden $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbf{K}$ esetén $\varphi(x_1 \star x_2) = \varphi(x_1) \star \varphi(x_2) = x_1 \star x_2$, tehát $x_1 \star x_2 \in \operatorname{Fix}\mathbf{K}$. Tehát $\operatorname{Fix}\mathbf{K}$ résztest, és így tartalmazza $\mathbf{K}$ prímtestét.

Nézzük a másik irányt. Legyen $\mathbf{P}$ a $\mathbf{K}$ prímteste. Ha x algebrai $\mathbf{P}$ felett, legyen m a minimálpolinomja, $\mathbf{L}$ az m felbontási teste $\mathbf{K}$-ban (ilyen van, mert $\mathbf{K}$ algebrailag zárt), y pedig az m egy x-től különböző gyöke (ilyen is van, mert m irreducibilis polinom, így nincs többszörös gyöke). Mivel x és y $\mathbf{P}$ feletti minimálpolinomjai megegyeznek, a kiterjesztési tétel szerint létezik olyan $\mathbf{P}(x) \to \mathbf{P}(y)$ izomorfizmus, ami x-et y-ba viszi. Az m polinomnak a $\mathbf{P}(x)$ és a $\mathbf{P}(y)$ feletti felbontási teste egyaránt $\mathbf{L}$, úgyhogy ez az izomorfizmus kiterjeszthető egy $\mathbf{L} \to \mathbf{L}$ automorfizmussá.

Ha x transzcendens, legyen $\mathbf{L} := \mathbf{P}(x)$ és $y = x+1$. Mivel y szintén transzcendens, a kiterjesztési tétel szerint van x-et y-ba vivő $\mathbf{P}(x) \to \mathbf{P}(y)$ izomorfizmus. Mivel $\mathbf{P}(y) = \mathbf{P}(x) = \mathbf{L}$, ez automorfizmus lesz.

Mindkét esetben kaptunk egy olyan $\mathbf{L}$ résztestet $\mathbf{K}$-ban, aminek van x-et nem fixen hagyó automorfizmusa. Ezt ki kell terjeszteni egy $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ automorfizmussá. A Zorn-lemma rutinszerű alkalmazásával kapjuk, hogy van egy **maximális** résztestе $\mathbf{K}$-nak, aminek van x-et nem fixen hagyó automorfizmusa. Legyen ez a résztest $\mathbf{M}$, és legyen $\psi \in \operatorname{Aut} M$ olyan, hogy $\psi(x) \neq x$.

Tegyük fel, hogy $a \in K \setminus M$. Ha a algebrai $\mathbf{M}$ felett, legyen p a minimálpolinomja, és legyen b egy $\mathbf{K}$-beli gyöke a $\psi(p)$ polinomnak. A kiterjesztési tétel értelmében ψ kiterjeszthető egy a-t b-be vivő $\mathbf{M}(a) \to \mathbf{M}(b)$ izomorfizmussá, ez pedig egy $\overline{\mathbf{M}(a)} \to \overline{\mathbf{M}(b)}$ izomorfizmussá. Ez automorfizmus, hiszen $\mathbf{M}(a)$ és $\mathbf{M}(b)$ algebrai lezártjai ($\mathbf{K}$-ban) megegyeznek.

Amennyiben a transzcendens $\mathbf{M}$ felett, a kiterjesztési tétel rögtön adja, hogy ψ kiterjeszthető $\mathbf{M}(a)$ egy automorfizmusává.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk $\mathbf{M}$ maximalitásával. Így $\mathbf{M} = \mathbf{K}$, készen vagyunk.

Az algebrai zártság feltevése nélkül nem igaz a feladat állítása. Pédául az $\mathbb{R}$ testnek nincs nemidentikus automorfizmusa, mégsem prímtest.)

Feladat 3. Van-e olyan α automorfizmusa a $\mathbb{C}$ testnek, melyre $\sqrt[3]{2}\alpha = \sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$?

Megoldás: Legyen $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ az első harmadik egységgyök. A $\sqrt[3]{2}$ és az $\omega\sqrt[3]{2}$ polinomok minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ felett egyaránt $x^3 - 2$, így a kiterjesztési tétel szerint van $\sqrt[3]{2}$-t $\omega\sqrt[3]{2}$-ba vivő $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$ izomorfizmus. Ez kiterjeszthető egy $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ automorfizmussá, az pedig (ugyanazzal a módszerrel, amit az előző feladatban csináltunk) egy $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ automorfizmussá.

Feladat 4. Van olyan megszámlálható test, amelynek algebrai lezártja nem megszámlálható?

Megoldás: Ha a $\mathbf{K}$ test megszámlálható, akkor a $\mathbf{K}[x]$ polinomgyűrű is az (nyilván $|K[x]| = |K| + |K|^2 + |K|^3 + \cdots \leq |K| \cdot \aleph_0$). A $\overline{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{K}$ algebrai bővítése, így $\overline{\mathbf{K}}$ elemeit sorba tudjuk rendezni a minimélpolinomjaik $\mathbf{K}[x]$-beli sorrendje szerint (itt tehnikailag szükségünk van a kiválasztási axiómára ahhoz, hogy az azonos minimálpolinomú elemeket sorrendbe tehessük).

Feladat 5. Mekkora a $\mathbb{Z}_2$ test algebrai lezártjának a számossága?

Megoldás: Az előző feladat alapján az algebrai lezárt megszámlálható. Véges nem lehet, mert n elemű véges testben az $x^n - x + 1$ polinomnak nincs gyöke (a polinomfüggvény konstans 1). Tehát a számosság $\aleph_0$.